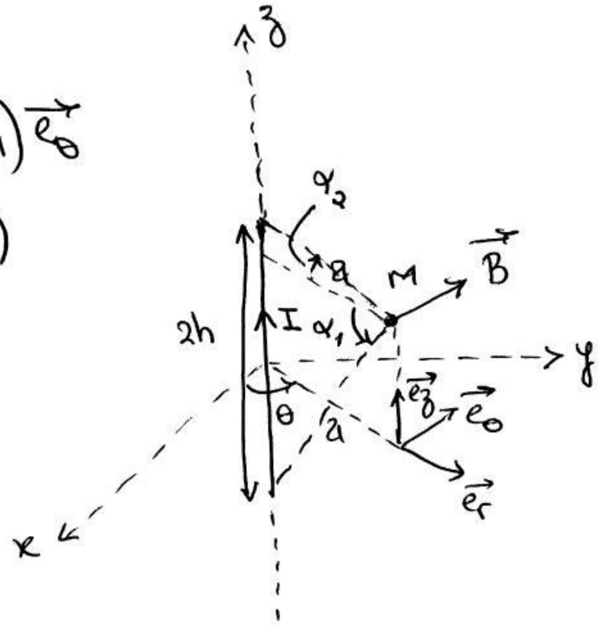
UNIVERSITE IBN TOFAIL
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
Cycle Intégré Préparatoire aux Formations d’Ingénieurs
Année Universitaire 2013/2014

Physique 3 : Electromagnétisme

Solution Devoir Libre N° 1 : Symétrie et orientation du champ magnétique - Loi de Biot et Savart

Exercice 1.4. *Champ magnétostatique d’un circuit carré (Exercice supplémentaire)*[*]



1.4.1.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\vec{e}_\theta$$

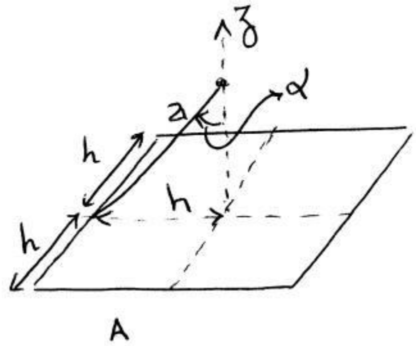
(D'après l'exercice 1.2.)

1.4.2.

Tout plan contenant l'axe (M,z) est un plan d'antisymétrie.

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e}_z$$

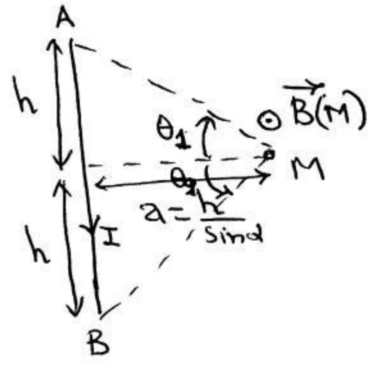
1.4.3.



On a : $\sin\alpha = \dfrac{h}{a}$

$$\Rightarrow a = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\vec{u}$$



$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot \frac{h}{\sin\alpha}}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

$$\theta_1 = -\theta_2$$

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi h}\, 2\sin\theta_1$$

$$\sin\theta_1 = \frac{h}{AM} \quad \text{avec} \quad AM^2 = h^2 + a^2 = h^2 + \frac{h^2}{\sin^2\alpha}$$

---

[*] Devoir libre n°1

$$AM^2 = h^2\left(\frac{\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha}\right) \Rightarrow AM = \frac{h\sqrt{\sin^2\alpha+1}}{\sin\alpha}$$

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi h}\, 2 \cdot \frac{K}{\frac{K\sqrt{\sin^2\alpha+1}}{\sin\alpha}}$$

$$\boxed{B_{AB} = \frac{\mu_0 I \sin^2\alpha}{2\pi h\sqrt{\sin^2\alpha+1}}}$$

1.4.4. $B(M) = 4B_{AB}$

$$B(M) = \frac{2\mu_0 I \sin^2\alpha}{\pi h\sqrt{\sin^2\alpha+1}}$$

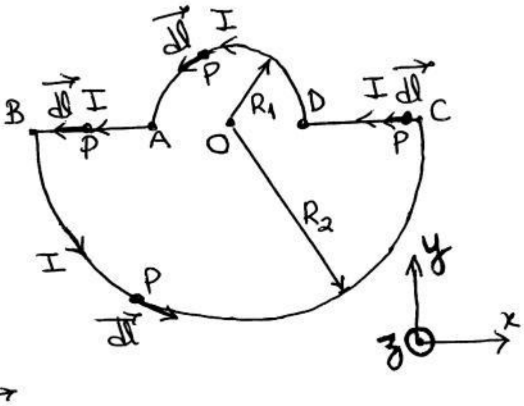
$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{2\mu_0 I}{\pi h}\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+1}}\vec{e}_z}$$

1.4.5. Au centre du carrée, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{2\mu_0 I}{\pi h}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi h}\vec{e}_z}$$

Exercice 1.6. *Champ magnétostatique d'un circuit constitué par des tronçons circulaires (Exercice supplémentaire)*[*]



* Soit $\vec{dl}$ l'élement le long du circuit dans le sens de I.
La loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underbrace{\int_A^B\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{\substack{=0\\(\vec{dl}\,//\,\vec{PO})}} + \int_B^C\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_C^D\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{\substack{=0\\(\vec{dl}\,//\,\vec{PO})}} + \int_D^A\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}\right]$$

entre B et C : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = dl \cdot PO(\vec{e_z}) = R_2\, dl\, \vec{e_z}$ $(PO = R_2)$

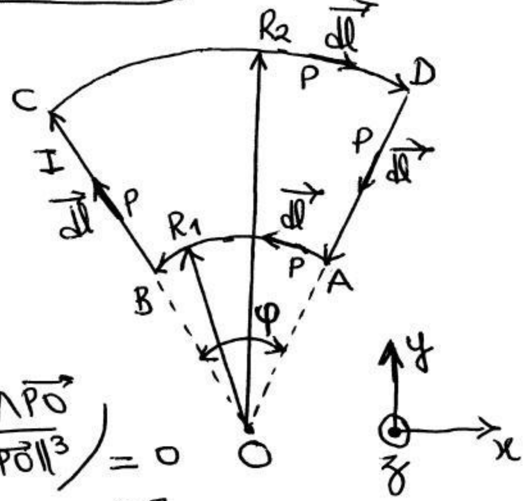
D et A : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = dl \cdot PO(\vec{e_z}) = R_1\, dl\, \vec{e_z}$ $(PO = R_1)$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_B^C \frac{dl}{R_2^2} + \int_D^A \frac{dl}{R_1^2}\right]\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\pi R_2}{R_2^2} + \frac{\pi R_1}{R_1^2}\right)\vec{e_z}$$

D'où $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4 R_1 R_2}(R_1 + R_2)\vec{e_z}}$

* La loi de Biot et Savart :



$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}.$$

$$\vec{B}(O) = \int d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_A^B \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_B^C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{=0} + \int_C^D \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_D^A \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{=0}\right]$$

entre A et B : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = R_1\, dl\, \vec{e_z}$

C et D : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = -R_2\, dl\, \vec{e_z}$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_A^B \frac{dl}{R_1^2} - \int_C^D \frac{dl}{R_2^2}\right]\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1^2}\int R_1\, d\varphi - \frac{1}{R_2^2}\int R_2\, d\varphi\right)\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\varphi}{R_1} - \frac{\varphi}{R_2}\right]\vec{e_z} = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R_1 R_2}(R_2 - R_1)\vec{e_z}$$

D'où : $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R_1 R_2}(R_2 - R_1)\vec{e_z}}$